Option T

PREMIERE EPREUVE : EXERCICES .

Durée: 4 heures.Aucun document n'est autorisé.Les quatre exercices sont indépendants .
Les candidats sont instamment priés de rédiger les exercices sur des copies séparées.

PREMIER EXERCICE

Soit f une fonction réelle d'une variable réelle , de classe C^1 , et vérifiant

$$\lim_{x\to-\infty} x^2f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2f'(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2f'(x) = 0$$

1°)

1.1 On pose $\varphi(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}\,dx$, $y \in \mathbb{R}$ ($i \in \mathbb{C}$, $i^2 = -1$) .

Donner le domaine de définition de φ .

1.2 Que peut-on dire de φ lorsque f est paire ? , impaire?.

2°) On pose $g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(x-2k\pi) + \sum_{k=1}^{+\infty} f(x+2k\pi)$.

2.1 Montrer que g est 2π-périodique , et de classe C^1 sur $[0 , 2\pi]$.

2.2 Exprimer , à l'aide de φ , les coefficients de Fourier c_n (n entier relatif) du développement de g en série de Fourier sous forme exponen-tielle.

2.3 Etudier la convergence de cette série .

2.4 Comparer $S_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} f(-2k\pi) + \sum_{k=1}^{+\infty} f(2k\pi)$

et $S_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi(-n) + \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(n)$.

3°) On prend $f(x) = e^{-x^2}$ et on admet qu'alors, $\varphi(y) = \sqrt{\pi}\, e^{-y^2/4}$.

Donner une valeur approchée de S_2 à 10^{-6} près .

DEUXIEME EXERCICE

On désigne par

n un entier donné , $n \geqslant 2$,

I l'ensemble $\{1 , 2 , \dots n\}$,

E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ dont les éléments sont identifiés à des matrices colonnes ,

A une matrice carrée d'ordre n , à coefficients réels , possédant n valeurs propres réelles et non nulles λ_i ($i \in I$) , deux à deux distinctes en valeur absolue , et classées de telle sorte que $0 < |\lambda_1| < |\lambda_2| < \dots < |\lambda_n|$,

V_i un vecteur propre associé à λ_i ($i \in I$) ,

X_o un élément de E n'appartenant pas au sous-espace engendré par V_1 , V_2 , $\dots$ V_{n-1} .

La suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E est définie par X_o et par la relation

$$X_{k+1} = A X_k .$$

1°)

1.1 A est-elle diagonalisable ?

Donner la limite $\lim_{k \to +\infty} \dfrac{X_k}{\lambda_n^k}$.

1.2 La suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle ?

1.3 On pose $X_k = \begin{pmatrix} x_{k,1} \\ x_{k,2} \\ . \\ . \\ x_{k,n} \end{pmatrix}$, $N(X_k) = \sup_{i \in I} |x_{k,i}|$, et $Y_k = \dfrac{X_k}{N(X_k)}$.

La suite $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle ? si oui , vers quelle limite ?

2°) On suppose à présent A symétrique et $\lambda_n > 0$.

On pose $r_k = \dfrac{{}^tX_k\, A\, X_k}{{}^tX_k\, X_k} = \dfrac{{}^tY_k\, A\, Y_k}{{}^tY_k\, Y_k}$.

Montrer que $\lim_{k \to +\infty} r_k = \lambda_n$.

En posant $Y = \lim_{k \to +\infty} Y_k$,

$E_k = Y - Y_k$,

et en désignant par I_n la matrice identité d'ordre n ,

établir que $(\lambda_n - r_k)\, {}^tY_k\, Y_k = {}^tE_k\, (\lambda_n I_n - A)\, E_k$.

TROISIEME EXERCICE

Le plan affine euclidien orienté $\mathbb{R}^2$ est rapporté au repère orthonormé direct $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

a est une constante réelle strictement positive donnée.

Soit (C) l'arc de courbe de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = a \cos^3\theta \\ y = a \sin^3\theta \end{cases} \qquad 0 < \theta < \pi/2 \ . \ \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

1°) La tangente à (C) en M coupe l'axe $(O ; \vec{i})$ en A et l'axe $(O ; \vec{j})$ en B.

1.1 Calculer la longueur AB .

1.2 k étant une constante réelle donnée , N désigne le point défini par

$\overrightarrow{AN} = k \overrightarrow{AB}$.

Déterminer la nature géométrique de l'arc décrit par N lorsque M parcourt (C) .

2°) Calculer la longueur de (C) .

3°) Soit (Γ) la développée de (C) .

3.1 Etablir une représentation paramétrique de (Γ) .

3.2 Donner la forme de (Γ) au voisinage du point correspondant à $\theta = \pi/4$.

QUATRIEME EXERCICE

L'espace affine euclidien orienté $\mathbb{R}^3$ est rapporté au repère orthonormé direct $(0 ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

α désigne un nombre réel donné vérifiant $0 < \alpha < \pi/2$, et R un réel strictement positif donné .

(S) est la surface de représentation paramétrique

$$x(\theta, \lambda) = R \cos\theta - \lambda \sin\alpha \sin\theta$$
$$y(\theta, \lambda) = R \sin\theta + \lambda \sin\alpha \cos\theta$$
$$z(\theta, \lambda) = \lambda \cos\alpha$$

où $0 \leq \theta \leq 2\pi$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

1°)

1.1 La surface (S) est-elle réglée?

1.2 Donner une équation cartésienne de (S) sous la forme $f(x^2+y^2, z) = 0$.
Reconnaitre (S) .
Par un point de (S) passe-t-il une ou plusieurs droites contenues dans (S) ?

2°) (S_1) et (S_2) sont les surfaces d'équations respectives

$$(x + R)^2 + y^2 - z^2 \tan^2\alpha = R^2 ,$$

$$(x - R)^2 - y^2 \cot an^2\alpha + z^2 = R^2 .$$

Soit (L) l'intersection de (S_1) et de (S_2) .

2.1 Donner les équations des projections de (L) sur les plans $(0 ; \vec{i}, \vec{j})$ et $(0 ; \vec{j}, \vec{k})$; discuter suivant les valeurs de α .
Quelle est la nature géométrique de (L) ?

2.2 On prend ici $\alpha = \pi/4$.
Former l'équation cartésienne des plans (P_1) et (P_2) , respectivement tangents à (S_1) et (S_2) en un point de (L) .